数学（３教科型）　2月9日 実施分

●工学部（電子情報工学科／電気工学科）
●情報工学部（情報工学科／情報通信工学科／システムマネジメント学科）

1

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
$(a\ ,\ a-2)$	-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{4\sqrt{5}}{9}$	189	378	4096	84	-2	0

2

①	②	③	④	⑤	⑥
1.6811	34	1.6990 または 1.699	16	84	9

3 (1) $f(x)-g(x)=2(x-2)(x+a)(x-a)$であるので，方程式$f(x)-g(x)=0$の解は$x=2,\ -a,\ a$である。
したがって，求めるx座標は，$x=2,\ -a\ ,\ a$である。

(2) $a\geqq 3$より$-a<2<a$である。2つの曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$で囲まれた部分は，
2つの曲線$y=f(x)\ (-a\leqq x\leqq 2)$，$y=g(x)\ (-a\leqq x\leqq 2)$で囲まれた部分と，
2つの曲線$y=f(x)\ (2\leqq x\leqq a)$，$y=g(x)\ (2\leqq x\leqq a)$で囲まれた部分とからなる。
区間$-a\leqq x\leqq 2$において$f(x)-g(x)\geqq 0$であり，区間$2\leqq x\leqq a$において$f(x)-g(x)\leqq 0$であるので，
求める面積Sは

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^{2}(f(x)-g(x))\,dx-\int_{2}^{a}(f(x)-g(x))\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3-a^2x^2+4a^2x\right]_{-a}^{2}-\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3-a^2x^2+4a^2x\right]_{2}^{a} \\ &= a^4+8a^2-\frac{16}{3} \end{aligned}$$

(3) $h(x)=x^4+8x^2-\frac{16}{3}$とすると，$h'(x)=4x^3+16x=4x(x^2+4)$である。したがって，$x>0$のとき$h'(x)>0$であるので，$h(x)$は区間$x>0$において単調増加である。いま，$a\geqq 3$であるので，$S$が最小となるのは$a=3$のときである。

4 [A]

(1) 点Pの座標を（$x,\ y,\ z$）とすると，点Pは線分OCを7：3に外分することから，

$x=\frac{-3\cdot 0+7\cdot 3}{7-3}=\frac{21}{4}$，$y=\frac{-3\cdot 0+7\cdot 1}{7-3}=\frac{7}{4}$，$z=\frac{-3\cdot 0+7\cdot\sqrt{6}}{7-3}=\frac{7\sqrt{6}}{4}$

であり，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{CP}}| &= \sqrt{\left(\frac{21}{4}-3\right)^2+\left(\frac{7}{4}-1\right)^2+\left(\frac{7\sqrt{6}}{4}-\sqrt{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{81+9+54}}{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。球面Sの半径は，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$に等しいので，求める半径は3である。

(2) (1)より，球面Sの半径は3であるから，Sの方程式は

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-\sqrt{6})^2=9$$

である。点A$(\alpha,\ 0,\ 0)$はS上の点であるから，この方程式を満たす。したがって，
$(\alpha-3)^2+(0-1)^2+(0-\sqrt{6})^2=9$，すなわち，$(\alpha-3)^2=2$を満たす。このことは，点B$(\beta,\ 0,\ 0)$についても同様であり，$\beta$は$(\beta-3)^2=2$を満たす。これらの等式を$\alpha$，$\beta$について解くと，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|<|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$より$\alpha<\beta$なので，
$\alpha=3-\sqrt{2}$，$\beta=3+\sqrt{2}$である。

4 [A]

(3) 点 A の座標は $(3-\sqrt{2},\ 0,\ 0)$ であるから，

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(3-\sqrt{2},\ 0,\ 0)-(3,\ 1,\ \sqrt{6})=(-\sqrt{2},\ -1,\ -\sqrt{6})$$

であり，$|\overrightarrow{CA}|$ は球面 S の半径に等しいので，$|\overrightarrow{CA}|=3$ である。また，点 B の座標は $(3+\sqrt{2},\ 0,\ 0)$ であるから，

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(3+\sqrt{2},\ 0,\ 0)-(3,\ 1,\ \sqrt{6})=(\sqrt{2},\ -1,\ -\sqrt{6})$$

であり，$|\overrightarrow{CB}|$ も球面 S の半径に等しいので，$|\overrightarrow{CB}|=3$ である。したがって，

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}+(-1)\cdot(-1)+(-\sqrt{6})\cdot(-\sqrt{6})=5$$

であり，

$$\cos\angle ACB=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{5}{3\cdot 3}=\frac{5}{9}$$

である。

4 [B]

(1) $f'(x)=\dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$ である。

(2) (1)より，増減表は以下の表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	／	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	／	↘	9	↗

したがって，関数 $f(x)$ は $x=0$ で極大値 1，$x=2$ で極小値 9 をとる。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸との交点は，$2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$ より，$x=-1$ と $x=\dfrac{1}{2}$ である。

このことと(2)の増減表より，曲線と x 軸で囲まれる部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+x-1}{x-1}\,dx\\&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\frac{(2x+3)(x-1)+2}{x-1}\,dx\\&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left\{(2x+3)+\frac{2}{x-1}\right\}dx\\&=\Big[x^2+3x+2\log|x-1|\Big]_{-1}^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{15}{4}-4\log 2\end{aligned}$$

数学（３教科型）　２月10日 実施分

●工学部（生命環境化学科／知能機械工学科）
●情報工学部（情報システム工学科）
●社会環境学部（社会環境学科）

1

①	②	③	④	⑤	⑥
$(3x+2y)(4x-3y)$	$(2x-2y+5)(x+y+1)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{13}{216}$	5	7

⑦	⑧	⑨	⑩
−２	1	13	96

2

①	②	③	④	⑤	⑥
13	$3\sqrt{3}$	$14\sqrt{3}$	$39\sqrt{3}$	196	$294\sqrt{3}$

3 (1)　対数法則を用いると

$(\log_5 x)^2 - \log_5 x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\log_5 x)(\log_5 x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \log_5 x = 0, 2$

よって，方程式の解は $x = 1, 25$

(2)　$\log_5 x = t$ とおくと，

$t^2 - 2t = k$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - k = 0$

この方程式の判別式 D は

$D = 4 + 4k$

よって，$t^2 - 2t = k$ がただ１つの解をもつときの k の値は

$k = -1$

$y = \log_5 x$ は増加関数であるから，$p = q \Leftrightarrow \log_5 p = \log_5 q$

したがって，元の方程式がただ１つの解を持つときの k の値も

$k = -1$

(3)　$\log_5 x = t$ とおくと，

$y = t^2 - 2t$　$(0 \leqq t \leqq 3)$

y は $t = 3$ のとき最大値３，

$t = 1$ のとき最小値 -1 をとる。

したがって，

$x = 125$ のとき 最大値３，

$x = 5$　のとき 最小値 -1

をとる。

4 [A]

$$a_n = \begin{cases} 2^k \cdot 3^{k-1} & (n=2k-1) \\ 2^k \cdot 3^k & (n=2k) \end{cases}$$

(1) $7776 = 2^5 \cdot 3^5$ より，$n = 10$

(2) $2023 = 2 \cdot 1012 - 1$ なので，

$a_{2023} = 2^{1012} \cdot 3^{1011}$

したがって，

$p = 1012,\ q = 1011$

(3) $a_{2m-1} = 2^m \cdot 3^{m-1}$ であるから，

a_{2m-1} の正の約数は $2^p \cdot 3^q$（$p = 0,\ \cdots\cdots,\ m,\ q = 0,\ \cdots\cdots,\ m-1$）

したがって，正の約数の個数は

$(m+1)\{(m-1)+1\} = m(m+1)$

である。

(4)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2m} a_n &= \sum_{k=1}^{m} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (2^k \cdot 3^{k-1} + 2^k \cdot 3^k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{3} 2^k \cdot 3^k + 2^k \cdot 3^k\right) \\ &= \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{m} 6^k \\ &= \frac{8(6^m - 1)}{5}\end{aligned}$$

4 [B]

(1)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} \\ &= x^2(3-x)e^{-x} \end{aligned}$$

(2) (1)より，増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{e^3}$	$\searrow$

したがって，関数 $f(x)$ は $x = 3$ で極大値 $\frac{27}{e^3}$ をとる。

(3) $f''(x) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$

(4) $f''(x) = 0$ の解は $x = 0,\ 3-\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3}$ である。

$f''(x)$ の符号を調べると，以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	$3+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

したがって，変曲点の x 座標は，

$x = 0,\ 3-\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3}$